多変数関数論に於ける値分布理論について (有理型函数,正則曲線の値分布)

野口, 潤次郎

数理解析研究所講究録
348巻 1979年 177-197

多変数関数論に於ける値分布理論について

阪大 教養　　野口潤次郎

序．　多変数関数論での値分布理論の現状—何がどこまでできていて，何が問題となっているか—を報告するのが本講の目的である．Kobayashi [14]には氏の双曲多様体の理論を中心とした詳しい解説があり，一部それと重複する処もあるが，ここでは正則写像（整関数も含めて）の定量的研究—Nevanlinna 理論—に話を限る．しかしこの方面の結果も，より広い"正則写像論"といった見地から観る時その意義が明確になることが多い．例えば，Nevanlinna 理論と Kobayashi 双曲多様体の理論，そして代数多様体間の有理写像の研究等の間に非常に深い関係があることを示唆し，又実際示している結果が色々ある．しかしこれも全体としては explicit に分っているわけでなく，この間をある程度一般的な枠組の中ではっきりさせることもたいへん興味ある問題である．

§1では以後頻繁に使われる積分等式を示す．§2では $\mathbb{C}^m$ 上の整関数（或いは有理型関数）とそれらの定める解析的集

合の関係について述べる。これはいわゆるNevanlinnaの第一主要定理とWeierstrass積を発展させたものである。前者については更にKähler多様体の中への正則写像についても証明する。§3では$\mathbb{C}^m$から同時元代数多様体への非退化正則写像に対する第二主要定理をCarlson-Griffiths [4] 及びGriffiths-King [12] に従って述べる。§4では代数多様体内の正則曲線の値分布について筆者の最近の結果 [19], [20] を紹介する。ここで触れなかった方面，及び応用については [14], [15], [21], [22], [23], [26] 及びそれらにある文献を参照して欲しい。

§1. $\mathfrak{F}$で$\mathbb{C}^m$上の実数値($+\infty$, $-\infty$も含めて)関数で局所的に多重劣調和関数の差でかけるものの全体を現わす。$\mathbb{C}^m$上の標準的な座標を$z=(z_1, \ldots, z_m)$とし次のようにおく：

$$\|z\|^2 = \sum_1^m |z_i|^2, \quad B(r) = \{\|z\| < r\}$$
$$\partial B(r) = \{\|z\| = r\}, \quad d = \partial + \bar{\partial}$$
$$d^c = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial),$$
$$\varphi = dd^c\|z\|^2, \quad \psi = dd^c \log \|z\|^2.$$

補題. $\xi \in \mathfrak{F}$とし，$dd^c\xi$をカレントの意味でとる。つまり$dd^c\xi$はメジャーを係数とする(1, 1)型式となる

(Lelong [17]を参照)。この時 $0 < r_1 < r_2$ に対し

(1.1) $$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{B(t)} dd^c \xi \wedge \psi^{m-1} = \int_{\partial B(r_2)} \xi d^c \log\|z\| \wedge \psi^{m-1} - \int_{\partial B(r_1)} \xi d^c \log\|z\| \wedge \psi^{m-1}.$$

証明. $\xi \in C^\infty$ の時を示す。一般の時は1の分割と convolution によるsmoothing でできる. まず Stokes を使って, $\psi^m \equiv 0$ に注意すれば

$$\text{右辺} = \int_{B(r_2)-B(r_1)} d\xi \wedge d^c \log\|z\| \wedge \psi^{m-1}$$

$$= \int_{B(r_2)-B(r_1)} d \log\|z\| \wedge d^c\xi \wedge \psi^{m-1}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{\partial B(t)} d^c \xi \wedge \psi^{m-1} \qquad [\because \text{Fubini}]$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{B(t)} dd^c \xi \wedge \psi^{m-1}. \qquad \text{q.e.d.}$$

§2. (イ) f を $\mathbb{C}^m$ 上の有理型函数, $(f)_0$ (resp. $(f)_\infty$) で f のゼロ(resp. 極)の定める因子を現わす. この時, 次のカレント方程式を得る:

(2.1) $$dd^c \log|f|^2 = (f)_0 - (f)_\infty .$$

注. これは本質的には次の事実による. $\mathbb{C}$上の座標をzとして

$$dd^c \log|z|^2 = \text{the Dirac measure at the origin}.$$

$\xi = \log|f|^2$ として (1.1) を適用すると,

$$\int_{\partial B(r)} \log|f|\, d^c\log\|z\|^2\wedge\psi^{m-1} - \int_{\partial B(1)} \log|f|\, d^c\log\|z\|^2\wedge\psi^{m-1}$$

$$= \int_1^r \frac{dt}{t}\int_{B(t)} (f)_0\wedge\psi^{m-1} - \int_1^r \frac{dt}{t}\int_{B(t)} (f)_\infty\wedge\psi^{m-1}.$$

$\int_{B(t)} (f)_0\wedge\psi^{m-1}$ は $\{f=0\}\cap B(t)$ 上重複度をこめて ψ^{m-1} を積分することで, $\int_{B(t)\cap(f)_0}\psi^{m-1}$ とかくことにする. $(f)_\infty$についても同様.

$$m(r, f) = \int_{\partial B(1)} \log^+|f|\, d^c\log\|z\|^2\wedge\psi^{m-1}$$

$$\left.\begin{aligned} n(t, f) &= \int_{B(t)\cap(f)_\infty}\psi^{m-1} \\ N(r, f) &= \int_1^r \frac{n(t, f)}{t}\,dt \end{aligned}\right\} \text{個数関数と呼ばれる.}$$

とそれぞれ置く. 更にNevanlinnaの位数関数を次で定義する:

(2.2) $$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f).$$

以上より次を得る.

第一主要定理.

(2.3) $T(r,f)=T(r,\frac{1}{f})+\int_{\partial B(1)}\log|f|\,d^c\log\|z\|^2\wedge\psi^{m-1}$.

注. $T(r,f)=O(\log r)\iff f$ は rational.

系 (Nevanlinna 不等式).

(2.4) $N(r,\frac{1}{f})<T(r,f)+O(1)$.

一般に Z を $\mathbb{C}^m$ 内の純 k 次元の解析的集合とし, その個数関数を

$$n(t,Z)=\int_{B(t)\cap Z}\psi^k,$$

$$N(r,Z)=\int_1^r\frac{n(t,Z)}{t}dt$$

と定義する。次の結果は基本的である (Bishop[2], Stoll[25]):

$$Z \text{ が代数的} \iff N(r,Z)=O(\log r)$$
$$(\iff n(t,Z)=O(1)).$$

さて $\operatorname{codim} Z=1$ で, Z が整函数 f の 0 因子になっている時 (2.4) より

$$N(r,Z)<T(r,f)+O(1).$$

$$\rho_f=\overline{\lim}_{r\to\infty}(\log T(r,f))/\log r=f\text{ の位数}$$
$$\rho_Z=\overline{\lim}_{r\to\infty}(\log N(r,Z))/\log r=Z\text{ の位数}$$

とおけば

$$\rho_Z \leqq \rho_f.$$

逆に有限位数 ρ をもつ因子 Z が与えられた時，これと同じ位数 ρ をもつ整函数 f で $(f)_0 = Z$ となるものが構成でき，$T(r,f)$ が $n(r, Z)$ を使って上から評価する式も得られる（[16]）。これは正に Weierstrass 積の拡張になっている．しかし $\mathrm{codim}\, Z \geqq 2$ の時はこのようにきれいにはならない。Cornalba－Shiffman [8] の例によれば，$\mathbb{C}^2$ 上位数 0 の整函数 f_1，f_2 で，0 次元の解析的集合 $Z = \{f_1 = f_2 = 0\}$ はいかなる増大度でも持ち得る．一方 Skoda [24] によれば，有限位数 ρ の解析的集合 Z が与えられた時，$m+1$ 個の位数 ρ を持つ整函数 $f_1, \ldots, f_{m+1}$ で

$$Z = \{f_1 = \cdots = f_{m+1} = 0\}$$

となるものが構成できる．

(2.5) 問題．Higher codimension の時の第一主要定理?

多くの数学者が手がけているが，未だ満足できる状態にはなっていない．

(ロ) 次はコンパクトな Kähler 多様体 V への正則写像を扱う．以下の議論は有理型写像に対しても全く同様である．$f: \mathbb{C}^m \longrightarrow V$ を正則写像とする．以下でみるように f の "位数函

数"とはそれほど明らかなものでない. 実 $c \in H^{1,1}(V, \mathbb{C})$ に対し, c に属する実(1, 1)型式 ω をとり,

$$(2.6)\quad T_f(r, c) = \int_1^r \frac{dt}{t}\int_{B(t)} f^*\omega \wedge \psi^{m-1}$$

と置く. 他の実(1, 1)型式 ω' をとった時 (2.6)の右辺の積分は $O(1)$-term しか変らないので, (2.6)は up to $O(1)$-term で well-defined である. このことは, V 上の C^∞-関数 ℓ で $dd^c\ell = \omega - \omega'$ をみたすものがある(Weil の Kähler 多様体の本の IV章を参照)ことより $dd^c f^*\ell = f^*\omega - f^*\omega'$ となり (1.1) を適用すればただちに分る. (2.6)の $T_f(r, c)$ を f の c に関する位数関数と呼ぶ. $\dim V = 1$ の時は

$$H^{1,1}(V, \mathbb{C}) = H^2(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

$$[\omega] \longmapsto \int_V \omega$$

よって $\int_V \omega = 1$ なる $[\omega] = c$ をとって

$$T_f(r) = T_f(r, [\omega])$$

と定義する. 特に $V = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の時は,

$$T_f(r) - T(r, f) = O(1).$$

一般の V にもどり, $L \longrightarrow V$ を直線束, $|\cdot|$ を L の metric, $|L|$ を L の完備線型系とする. $D \in |L|$ に対し, $\sigma \in H^0(V, L)$ を $|\sigma| < 1$ なるようにとり,

$$m_f(r,D)=\int_{\partial B(r)}\log\frac{1}{f^*|\sigma|}\,d^c\log\|z\|^2\wedge\psi^{m-1},$$

$$N_f(r,D)=N(r,f^*D)$$

と置く．L の $H^{1,1}(V,\mathbb{C})$ での第1 Chern 類を $c_1(L)$ と書き，metric $|\cdot|$ の曲率形式を $\omega\in c_1(L)$ とする．この時次のカレント方程式が成立する：

(2.7) $dd^c\log f^*|\sigma|^2 = f^*D - f^*\omega.$

前と同様に (1.1) を適用すれば次が分る．

第一主要定理．任意の $D\in|L|$ に対し，

(2.8) $T_f(r,c_1(L)) = N_f(r,D)+m_f(r,D)+O(1).$

系（Nevanlinna 不等式）．

(2.9) $N_f(r,D) < T_f(r,c_1(L))+O(1).$

注．$\dim V=1$ の時，$D=$ 一点 $a\in V$ ならば，D で決まる直線束 $[D]$ の第1 Chern 類を $c_1(D)$ とかくと $\int_V c_1(D)=1$ だから，

$$T_f(r)=N_f(r,a)+m_f(r,a)+O(1).$$

(2.10) 問題．直線束をベクトル束にした時どうなるか？

問題 (2.5) と同じ理由でうまくできない（Bott-Chern [3], Griffiths-King [12] 等を参照）．

§3．この節では V を n 次元非特異複素射影的代数多様体とし，正則写像 $f:\mathbb{C}^m\to V$ で非退化なもの，つまりその

Jacobian $J(f) \neq 0$, に対し Nevanlinna の第二主要定理を一般化する.

Fatou [10] による例: $\exists f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 中への双正則写像で, $f(\mathbb{C}^2)$ は外点を持つ.

この例は, 非退化正則写像 $f: \mathbb{C}^m \to V$ が V の"点"をどのくらい覆うかを扱うことが非常に難かしいことを示している。覆わない点が多すぎるのである. ここでは $f(\mathbb{C}^m)$ が V の"因子"とどのくらい交わるかを扱い, Carlson, Griffiths, King [4], [12] 等により示された第二主要定理を述べる. としてこれが一変数の場合の自然な拡張になっていることが分る.

$D_1, \ldots, D_q$ を V 上のアンプルな非特異既約因子とし $D_1 + \cdots + D_q$ は正規交叉とする. また簡単の為

(3.1) $\quad c_1(D_1) = \cdots = c_1(D_q) = c \in H^{1,1}(V, \mathbb{C})$

と仮定し $T_f(r) = T_f(r, c)$ とおく. $f: \mathbb{C}^m \to V$, $m \geq \dim V$ で (3.1) 以外の時もできているが, 上述の場合が本質的である (Sakai [23] を参照). 各 $[D_i]$ に計量 $\|\cdot\|$ と, $D_i = (\sigma_i)$ となる $\sigma_i \in H^0(V, [D_i])$ を $\|\sigma_i\| < 1$ ととる. 更に Ω を V 上のいたる所正の (n, n) 型式 (体積要素) として

$$\Psi = \Omega \Big/ \prod_{i}^{q} \|\sigma_i\|^2 (\log \|\sigma_i\|^2)^2$$

とおく．Ω と計量 $|\cdot|$ をうまくとると（[12]を参照）

$$\Psi \in L^1(V),$$

$$\mathrm{Ric}\,\Psi > 0, \quad \mathrm{Ric}\,\Psi \in L^1(V),$$

$$(3.2)\quad \Psi \leqq (\mathrm{Ric}\,\Psi)^n \in L^1(V).$$

ここで $\mathrm{Ric}\,\Psi$ とは一般に Ψ が体積要素で局所的に

$$\Psi = \Psi(x)\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}dx_1\wedge d\bar{x}_1\wedge\cdots\wedge\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}dx_n\wedge d\bar{x}_n$$

と書かれる時

$$\mathrm{Ric}\,\Psi = dd^c\log\Psi(x)$$

で定義される $(1,1)$ 型式である．

$$f^*\Psi = f^*\Omega\Big/\prod_1^q f^*|\sigma_j|^2(\log f^*|\sigma_j|^2)^2$$

$$= \xi\,\varphi^n$$

とおく．この時次のカレント方程式を得る：

$$(3.3)\quad dd^c\log\xi = f^*\mathrm{Ric}\,\Psi - \sum_1^q f^*D_j + R,$$

ここで $R = (J(f))_0$（分枝因子）．

$$\mu(r) = \int_{\partial B(r)}\log\xi\, d^c\log\|z\|\wedge\psi^{n-1}$$

とおき (1.1) を (3.3) に適用する：

$$(3.4)\quad \int_1^r\frac{dt}{t}\int_{B(t)}\mathrm{Ric}\,\Psi\wedge\psi^{n-1} = \sum_1^q N_f(r,D_j) - N(r,R) + \mu(r) - \mu(1).$$

$\mathrm{Ric}\,\Psi$ の定義と "log" の凹性を使うと

$$(3.5)\quad 0 \leqq q\,T_f(r) + T_f(r, c_1(K_V)) - \int_1^r\frac{dt}{t}\int_{B(t)}\mathrm{Ric}\,\Psi\wedge\psi^{n-1}$$

$$\leqq 2\log(T_f(r)) + O(1).$$

さて(3.2)と(3.5)を使うと，$\mu(r)$の評価ができる：

(3.7) $\mu(r) = O(\log(rT_f(r))) + O(1)$,

但し $\rho_f < \infty$ の時は，全ての r について成立するが，$\rho_f = \infty$ の時は測度有限な除外集合の外の r について成立する．

(3.8)定義．$\underbrace{\text{上述のような}}_{\mu(r)\text{の}}$性質をもつ量を以後 $S(r)$ と書く．

扨て，実の $\alpha \in H^{1,1}(V;\mathbb{C})$ に対し，$\alpha > 0$ とは α が正定値な実(1,1)型式を含むこととし，

$$\frac{c_1(-K_V)}{c} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R};\ \lambda c + c_1(K_V) > 0\}$$

とおく．又 D_i の defect $\delta(D_i)$ を次で定義する．

$$\delta(D_i) = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} N_f(r, D_i)/T_f(r)$$

(2.9)より $0 \leqq \delta(D_i) \leqq 1$; $f(\mathbb{C}^n) \cap D_i = \phi \Rightarrow \delta(D_i) = 1$.

第二主要定理．

(3.8) $$qT_f(r) + T_f(r, c_1(K_V)) \leq \sum_1^q N_f(r, D_i) - N(r, R) + S(r).$$

系(defect relation).

(3.9) $$\sum_1^q \delta(D_i) \leqq \frac{c_1(-K_V)}{c}$$

更に $\overline{N}_f(r, D_i)$ を重複度をこめない個数関数とすれば，$D_1 + \cdots + D_q$ が正規交叉となっている事より

$$\sum_1^q N_f(r, D_i) - N(r, R) \leqq \sum_1^q \overline{N}_f(r, D_i).$$

$$\Theta(D_i) = 1 - \overline{\lim}_{r\to\infty} \overline{N}_f(r, D_i)/T_f(r)$$

とおくと

$$(3.10) \qquad \sum_1^q \Theta(D_i) \leqq \frac{c_1(-K_V)}{c}$$

従って f が各 D_i 上 m_i 位以上で分枝していれば，つまり f^*D_i の各既約成分の位数が m_i 以上ならば，

$$1 - \overline{N}_f(r, D_i)/T_f(r) \geqq 1 - \frac{1}{m_i} N_f(r, D_i)/T_f(r) \geqq 1 - 1/m_i.$$

よって $\Theta(D_i) \geqq 1 - \dfrac{1}{m_i}$．これより

$$(3.11) \qquad \sum_1^q \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leqq \frac{c_1(-K_V)}{c}.$$

注．(イ) $\dim V = 1$ の時，$c_1(K_V) = 2g - 2$，g は V の種数．従って $D_i = a_i \in V$ ならば

$$\sum_{a_i \in V} \delta(a_i) \leqq 2 - 2g,$$

$$\sum_{a_i \in V} \Theta(a_i) \leqq 2 - 2g,$$

$$\sum_{a_i \in V} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leqq 2 - 2g,$$

等が出る．

(ロ) $V = P_{\mathbb{C}}^n$，D_i が超平面の時

$$c_1(K_V) = -(n+1)c_1(D_i)$$

だから $\dfrac{c_1(-K_V)}{c_1(D_i)} = n+1$ となる．そして $D_1 + \cdots + D_q$ が正規交叉とは，一般の位置にあることと同値．

(ハ) $V=$ アーベル多様体の時, $c_1(K_V)=0$ だから, (3.9) 或いは (3.10) は, 非退化な $f:\mathbb{C}^m\to V$ はいかなる V の因子とも交叉することを主張している.

§4. この節では, n 次元複素射影的非特異代数多様体 V 内の正則曲線（＝正則写像）$f:\mathbb{C}\to V$ の値分布について論ずる. 一般の $m\geq 1$ について議論したいわけであるが, この場合も f が V の"点"をどのくらいとるかを考えるには, とらない点があまりにも多い. ここでは§3と同様, V の因子と f がどのくらい交叉するかを扱う. 第一主要定理については§2(1)でできている. 問題は第二主要定理である. これについて知られている事は極めて少ない. 次はよく知られている古典的な場合である.

$$(4.1)\quad \begin{cases} V=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \\ D=\sum_1^q \text{ hyperplanes } D_i \text{ in general position}, \\ f:\mathbb{C}\longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \text{ は線型非退化} \end{cases}$$

ここで線型非退化とは像 $f(\mathbb{C})$ がある一つの超平面に含まれることがないこと. H. Cartan が 1933年に, 優美な方法で 1941年 Ahlfors が次の第二主要定理を証明した.

第二主要定理（[1],[5],[28] 参照）. (4.1) の時,

$$(4.2)\quad (q-n-1)T_f(r) < N_f(r, D) + S(r).$$

ここで $T_f(r)=T_f(r, G(D_j))$, $S(r)$ は(3.8)で定義された量. 更に H. Cartan は同じ論文で, $N_f(r, D)$ の代りに, f が D と交わる時その位数(重複度)が ν 以下の時はその位数, それ以上の時は ν とした個数関数 $n_f^{(\nu)}(r, D)$, $N_f^{(\nu)}(r, D)$ を導入し, (4.1)のもとで次を示した.

(4.3) $(q-n-1)T_f(r) < N_f^{(n)}(r, D) + S(r)$.

$N_f^{(1)}(r, D) = \overline{N}_f(r, D)$ であるから

(4.4) $\dfrac{q-n-1}{n}T_f(r) < \overline{N}_f(r, D)+S(r)$.

$\delta(D_j) = 1-\varlimsup_{r\to\infty} N_f(r, D_j)/T_f(r)$ とおけば (4.2) より次が出る.

系 (defect relation). $\sum\delta(D_j) \leq n+1$.

今の処, 第二主要定理及び defect relation がこのように完全な形できれいにできているのは (4.1)の場合, その付随曲線の場合だけである. ここでは問題を次のように弱める:

問題. 一般の V に対し, その上の因子 D と, 正則曲線 $f: \mathbb{C} \to V$ が如何なる時, 正定数 κ をもって

(4.5) $\kappa T_f(r) < N_f(r, D) + S(r)$

なる不等式が成立するか?

ここで我々が実際に証明するのは (4.4)に対応する次の式である

(4.6) $\kappa T_f(r) < \overline{N}_f(r, D) + S(r)$.

注. Nevanlinna の原論文[18]を見ると，上の問題意識のもち方は Nevanlinna の動機に沿ったものであることが分る.

V 上に一つ Kähler 型式 Ω を固定し，

$$T_f(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\{|z|<t\}} f^*\Omega$$

と置く. 他方の Kähler 型式 Ω' をとりそれに対応する位数関数を $T_f'(r)$ とすると，Ω と Ω' で決る正定数 A, A' があって $AT_f(r) < T_f'(r) < A'T_f(r)$ となる.

$R(V)$ で V 上の有理関数体を現わし，その $\mathbb{C}$ 上の生成元 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ でそれらの極に $f(\mathbb{C})$ が入ってしまわないものをとる. $f^*\varphi_j$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数となり (2.2) で定義した位数関数 $T(r, f^*\varphi_j)$ を使って

$$(4.7) \qquad \tilde{T}_f(r) = \max_{1 \leq j \leq s} T(r, f^*\varphi_j)$$

と置く. V が射影的代数多様体であることより，Ω と $\{\varphi_j\}$ で決まる正定数 B, B' があって次のようになる:

$$(4.8) \qquad BT_f(r) + O(1) < \tilde{T}_f(r) < B'T_f(r) + O(1).$$

注. $\dim V = 1$ の時，$\varphi \in R(V)$ に対し

$$d(\varphi) = \text{degree of zeros of } \varphi$$
$$= \text{degree of poles of } \varphi.$$

Ω を $\int_V \Omega = 1$ となるようにとると、

$$T_f(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\{|z|<t\}} f^*\Omega = \frac{1}{d(\varphi)} T(r, f^*\varphi) + O(1).$$

D を V 内の余次元 1 の解析的集合（因子）、$x_0 \in V$ の近傍で $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 0$，$\sigma_i$ は既約，がその定義方程式とする．$\mathcal{O}_V$ を構造層とし，Ω_V^1 を V 上の正則 1 型式の層，D にそって対数的極をもつ 1 型式の層 $\Omega_V^1(\log D)$ を次のように定義する：

$$\Omega^1_{V,x}(\log D) = \sum \mathcal{O}_{V,x} \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} + \Omega^1_{V,x}.$$

(4.9) 拡張された Nevanlinna の対数微分に関する補題．
$\omega \in H^0(V, \Omega_V^1(\log D))$ に対し $f^*\omega = \xi(z)\,dz$ とおくと

$$m(r, \xi) = S(r).$$

扨て次の二条件を考える（[22]，[19] を参照）

(4.10) $n+1$ 個の元からなる系 $\{\omega_i\}_{i=1}^{n+1} \subset H^0(V, \Omega_V^1(\log D))$ で $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1}$，$1 \leqq i \leqq n+1$，が $\mathbb{C}$ 上一次独立なものが存在する．

(4.11) (4.10) の $\{\omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ に関して $f: \mathbb{C} \to V$ が非退化とは総ての $(c_1, \cdots, c_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ に対し

$$f(\mathbb{C}) \not\subset \left\{ \sum_1^{n+1} c_i\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1} = 0 \right\}.$$

(4.12) 第二主要定理型の定理 ([19], [20]). (4.9), (4.10) を仮定する. すると各々の f によらない正定数 K があって,

(4.6) $$K\,T_f(r) < \overline{N}_f(r, D) + S(r)$$

証明のスケッチ. $\varphi \in K(V)$ で, その極の中に $f(\mathbb{C})$ が入ってしまわないものとする. $f^*\omega_i = J_i\,dz$ とおき, $J_i^{(k)}$ でその k 階の導関数を現わし, $\mathbb{C}(J_i^{(k)})^{0 \le k \le n-1}_{1 \le i \le n+1}$ で $\mathbb{C}$ 上それらの $J_i^{(k)}$ で生成される関数体とする. (4.9), (4.10) と Ochiai [22, 定理A] を使うと, $f^*\varphi$ が $\mathbb{C}(J_i^{(k)})^{0 \le k \le n-1}_{1 \le i \le n+1}$ 上代数的であることが分り, 更に [20] によって, その代数的関係式が f を動かした時, 高々有限個であることが分る. この事実より $\widetilde{T}_f(r)$ を (4.7) で与えられたものとすると, 各々の f によらない正定数 K_1 があって

$$K_1\,\widetilde{T}_f(r) < \max_{\substack{1 \le i \le n+1 \\ 0 \le k \le n-1}} T(r, J_i^{(k)}) + O(1).$$

ここで (4.9) を使うと

$$T(r, J_i^{(k)}) \le (k+1)\,\overline{N}_f(r, D) + S(r).$$

従って

$$\frac{K_1}{n}\,\widetilde{T}_f(r) < \overline{N}_f(r, D) + S(r).$$

これと (4.8) から (4.6) を得る. q.e.d.

注1. $\dim V = 1$ の時は, V が楕円曲線の時を除いて (4.12) は最良. V が楕円曲線の時

$(4.10) \Longleftrightarrow$ Dは二点以上.

一方(4.6)は D＝一点で十分なことが知られている(§3の最後の部分の注を参照).

注2. $V=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n\geqq 2$, $D=\sum_1^q$ hyperplanes D_i, の場合.

(イ) $n\geqq 2$, $q=n+2$ の時;

$(4.10) \Longleftrightarrow$ $D=D_1+\cdots+D_{n+2}$ in general position

$(4.11) \Longleftrightarrow$ fは線型非退化.

(ロ) $n=2$ で qは一般の時;

$(4.10) \Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Dの中に4個の一般の位置にある}D_i\text{がある.}\end{array}\right.$

(ハ) $n\geqq 3$, $q\geqq n+3$ の時; $q=n+3$, $n\geqq 3$で(4.10)は充されるが, $D_1,\cdots,D_{n+3}$からどの$n+2$ケをとり出しても一般の位置にならという D の例がある,[L, p. 47].

注3. 今迄知られていたのと異なるタイプの例を与える.

$V=$ アーベル多様体

D_1, D_2 を正のアンプルな因子で共通成分を持たず, 互いにホモロガスなものとする. この時

$$D = D_1 + D_2$$

は(4.10)を充す.

注4. $f:\mathbb{C}^m \to V$, $m \geq 1$ に対しても (4.12) は，$\mathbb{C}^m$ の原点を通る複素直線 $\mathbb{C}$ で，f のそれへの制限が $\{w_i\}_{i=1}^{n+1}$ に関して非退化になっているものがあるならば成立する.

(4.13) 問題. (4.5) 及び (4.6) の K を決めよ.

K の計算可能な V 及び D の "class" を見つけるのも興味ある問題と思う (Wu).

References

[1] L. Ahlfors, The theory of meromorphic curves, Acta Soc. Scie. Fennicae Nova Ser. A. III 4(1941),3-31.

[2] E. Bishop, Condition for the analyticity of cetain sets, Mich. Math. J. 11(1964), 289-304.

[3] R. Bott and S. S. Chern, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections, Acta Math. 114(1965), 71-112.

[4] J. Carlson and P. Griffiths, A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties, Ann. Math. 95(1972),557-584.

[5] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes donées, Matematica 7(1933), 5-31.

[6] S. S. Chern, Holomorphic curves in the plane, Diff. Geom. in Honor of K. Yano, pp. 73-94, Kinokuniya, Tokyo, 1972.

[7] S. S. Chern, M. J. Cowen and A. L. Vitter III, Frenet frames along holomorphic curves, Value Distribution Theory, Part A, pp. 191-203, Marcel Dekker Inc. New York, 1974.

[8] M. Cornalba and B. Shiffman, A counterexample to the "Transcendental Bezout problem", Ann. Math. 96(1972), 402-406.

[9] M. J. Cowen and P. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature, J. Analy. Math. 29(1976), 93-153.

[10] P. Fatou, Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C. R. Acad. Scie. Paris 175(1922), 862-865.

[11] P. Griffiths, Entire Holomorphic Mappings in One and Several Complex Variables, Ann. Math. Study 85, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[12] P. Griffiths and J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, Acta Math. 130(1973), 145-220.

[13] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker Inc., New York, 1970.

[14] ———, Intrinsic distances, measures and geometric function theory, Bull. Amer. Math. Soc. 82(1976), 357-416.

[15] K. Kodaira, On holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geom. 6(1971), 33-46.

[16] P. Lelong, Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n, J. Analy. Math. 12(1964), 365-407.

[17] ———, Fonctions plurisousharmoniques et Formes différentielles positives, Gordon and Breach, Paris, 1968.

[18] R. Nevanlinna, Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. 46(1925), 1-50.

[19] J. Noguchi, Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. 7(1977), 833-853.

[20] ———, Remarks on an inequality for holomorphic curves in algebraic varieties, preprint.

[21] ———, Rigidity of holomorphic curves in some surfaces of hyperbolic type , preprint.

[22] T. Ochiai, On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularlity, Invent. Math. 43(1977), 83-96.

[23] F. Sakai, Degeneracy of holomorphic maps with ramification, Invent. Math. 26(1974), 213-229.

[24] H. Skoda, Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans C^n, Bull. Soc. math. France 100(1972), 353-408.

[25] W. Stoll, The growth of the area of a transcendental analytic set I, II , Math. Ann. 156(1964), 47-78, 144-170.

[26] ———, Value Distribution on Parabolic Spaces, Lecture Notes in Math. 600, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

[27] H. and J. Weyl, Meromorphic Functions and Analytic Curves, Ann. Math. Study 12, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1943.

[28] H. Wu, The Equidistribution Theory of Holomorphic Curves, Ann. Math. Study 64, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, Princeton, New Jersey and Tokyo, 1970.